УДК 531.1

М.Д.ШИНИБАЕВ[1], А.А.БЕКОВ[1], А.АБЖАПБАРОВ[2],
С.С.ДАЙЫРБЕКОВ[3],Е.С.АЯШЕВА[3], А.С.САНСЫЗБАЕВА[3]

([1]Институт космических исследований имени академика У.М.Султангазина
АО «НЦКИТ», г.Алматы;
[2]Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауезова,
г.Шымкент;
[3]Университет Сыр-Дария, г.Джетысай)

АНАЛОГ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ С.В.КОВАЛЕВСКОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Аннотация

Найден новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения. Случай интегрируемости получен для осесимметричного твердого тела, главные центральные моменты инерции которого связаны между собой равенством $A = B = 2C$, причем $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 0$, где C – центр масс твердого тела.

Точно с таким же распределением масс С.В.Ковалевской была решена другая задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Общее решение в этом случае было записано в гиперэллиптических функциях. Это решение было получено в 1889 г. Неподвижная точка была расположена в экваториальной плоскости, т.е. $x_G \neq 0$, $y_G \neq 0$, $z_G = 0$, где G – точка приложения силы тяжести тела.

Оказалось, что эта задача тесно связана со многими актуальными проблемами математики и механики и с каждым годом все больше расширяются теоретические и практические приложения достигнутых результатов и методов, которыми они получены [1].

В нашей задаче, в отличие от задачи С.В.Ковалевской, центр, относительно которого совершается вращательное движение, совмещен с центром масс тела, следовательно, момент силы тяжести относительно центра масс равен нулю, и движение тела происходит в центральном ньютоновском поле тяготения.

В нашем случае полная система дифференциальных уравнений вращательных движений относительно центра масс тела в ньютоновском поле тяготения допускает четыре независимых первых интеграла.

Согласно общей теории наличие этих четырех интегралов позволяет проинтегрировать полную систему дифференциальных уравнений поставленной задачи.

Полученные решения являются модельными решениями, которые могут быть использованы для прогнозирования вращательных движений неуправляемых космических объектов (спутники Земли в нештатных ситуациях, космический мусор и т.д.).

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательные движения, моменты инерции тела.

Кілт сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает движение относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения, тогда полная система дифференциальных уравнений в подвижных осях, направленных по главным центральным осям тела, имеют вид [2]:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &A\dot{p} + (C-B)qr = \varepsilon(C-B)\gamma'\gamma'', \\ &B\dot{q} + (A-C)pr = \varepsilon(A-C)\gamma''\gamma, \\ &C\dot{r} + (B-A)pq = \varepsilon(B-A)\gamma\gamma', \quad \varepsilon = \frac{2\mu}{R^3}; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\dot{\gamma} = r\gamma' - q\gamma'', \quad \dot{\gamma}' = p\gamma'' - r\gamma, \quad \dot{\gamma}'' = q\gamma - p\gamma', \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \sin\varphi\sin\theta, \;\; \gamma' = \sin\theta\cos\varphi, \;\; \gamma'' = \cos\theta, \;\; \dot{\psi} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2}, \\ &\theta = \arccos\gamma'', \quad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где: θ, φ, ψ – углы Эйлера; μ – гравитационная постоянная, R – расстояние от центра масс до центра притяжения; p, q, r – проекции угловой скорости тела $\overline{\omega}$ на подвижные оси; γ, γ', γ'' – направляющие косинусы; A, B, C – главные центральные моменты инерции тела; (1) – кинематические уравнения Эйлера; (2) – динамические уравнения Эйлера; (3) – соотношения Пуассона; (4) – соотношения Ю.А.Архангельского.

Рассмотрим случай, когда главные моменты инерции тела связаны между собой соотношением

$$A = B = 2C. \qquad (5)$$

Перепишем (2) с учетом (5)

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{dp}{dt} - qr = -\varepsilon\gamma'\gamma'', \\ &2\frac{dq}{dt} + pr = \varepsilon\gamma\gamma'', \\ &C\frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Из последнего уравнения находим первый интеграл

$$r = r_0 = const\,. \qquad (7)$$

Перепишем (6), используя (7)

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} - qr_0 &= -\varepsilon\gamma''\gamma'', \\ 2\frac{dq}{dt} + pr_0 &= \varepsilon\gamma\gamma''. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Из (4) находим тривиальный интеграл

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1. \qquad (9)$$

Для определения интеграла энергии умножим первое уравнение из (8) на p, второе на q и сложим

$$2p\frac{dp}{dt} + 2q\frac{dq}{dt} = \varepsilon\gamma''(q\gamma - p\gamma'), \qquad (10)$$

теперь учтем, что $\dot{\gamma}'' = q\gamma - p\gamma'$, тогда после незначительных преобразований имеем интеграл энергии в следующем виде

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2 + C_1. \qquad (11)$$

где C_1 – постоянная интеграла энергии.

Для определения интеграла площадей умножим первое из уравнений (8) на γ, второе на γ′ и сложим

$$2\left(\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt}\right) + r_0(p\gamma' - q\gamma) = 0, \qquad (12)$$

учитывая $(p\gamma' - q\gamma) = -\dfrac{d\gamma''}{dt}$, найдем

$$2\left(\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt}\right) + r_0\frac{d\gamma''}{dt} = 0, \qquad (13)$$

Преобразуем (13), учитывая (3)

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma p + \gamma' q - \frac{1}{2}r_0\gamma''\right) = -r_0\frac{d\gamma''}{dt}, \qquad (14)$$

отсюда

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma p+\gamma' q-\frac{3}{4}r_0\gamma''\right)=0,$$

следовательно, интеграл площадей имеет вид

$$\gamma p+\gamma' q=C_2-\frac{1}{2}r_0\gamma'', \tag{15}$$

где C_2 – постоянная интеграла площадей.

Таким образом, имеем четыре первых интеграла: (7), (9), (11) и (15)

$$\left.\begin{aligned}&r=r_0=const,\\&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,\\&p^2+q^2=\frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2+C_1,\\&\gamma p+\gamma' q=C_2-\frac{1}{2}r_0\gamma''.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Проверим их на линейную независимость, для этого перепишем (16) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&r=r_0,\\&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,\\&p^2+q^2-\frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2=C_1,\\&\gamma p+\gamma' q+\frac{1}{2}r_0\gamma''=C_2.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и составим следующую линейную комбинацию

$$\lambda_1 r_0+\lambda_2\cdot 1+\lambda_3 C_1+\lambda_4 C_2=0, \tag{18}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4-const$, здесь $r_0\neq 0,\ 1\neq 0,\ C_1\neq 0,\ C_2\neq 0$, поэтому (18) удовлетворяется только при $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=0,\ \lambda_4=0$, то есть первые интегралы (17) линейно независимы.

Согласно общей теории [2] наличие четырех линейно независимых первых интегралов позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1)-(3).

Найдем углы Эйлера в квадратурах. Из (1) найдем

$$p^2+q^2=\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2(1-\gamma''^2). \tag{19}$$

Из уравнения (3) системы (4) найдем

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{1-\gamma''^2}\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2. \qquad (20)$$

Из третьего уравнения системы (17) имеем

$$p^2 + q^2 = C_1 - \frac{1}{2}\varepsilon\gamma''^2. \qquad (21)$$

Из (4) и последнего уравнения (17) находим

$$\dot{\psi}^2 = \left(\frac{2C_2 - r_0\gamma''}{2(1-\gamma''^2)}\right)^2. \qquad (22)$$

Из (19)-(22), исключая $(p^2+q^2), \dot{\theta}^2, \dot{\psi}^2$, находим

$$a_0 t = \int \frac{d\gamma''}{\sqrt{-\gamma''^4 + b_1\gamma''^3 + b_2\gamma''^2 + b_3\gamma'' + b_4}} + C_3, \qquad (23)$$

где:

$$b_1 = 0,\ b_2 = 1 - \frac{2C_1}{\varepsilon} - \frac{r_0^2}{2\varepsilon},\ \ b_3 = \frac{2C_2 r_0}{\varepsilon},\ \ b_4 = \frac{(2C_1 - 2C_2^2)}{\varepsilon},\ \ a_0 = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}},\ \ C_3 - const.$$

Из (23) имеем $\gamma'' = F(t, C_3)$, следовательно, из (20) найдем

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)dt + C_4. \qquad (24)$$

Из (22)

$$\psi = \int \frac{2C_2 - r_0\gamma''}{2(1-\gamma''^2)}dt + C_5. \qquad (25)$$

Из последнего уравнения (1) находим

$$r_0 = \dot{\psi}\gamma'' + \dot{\varphi},$$

то есть

$$\varphi = \int (r_0 - \dot{\psi}\gamma'')dt + C_6. \qquad (26)$$

Выражения (24), (25), (26) определяют углы Эйлера в квадратурах.

Результаты исследований важны для разработки модельных расчетов задач небесной механики и динамики космического полета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона.-М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.- 172 с.

2. *Шинибаев М.Д.* Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли.- Алматы, 2010.- 132 с.

REFERENCES

1. Dokshevych A.I. Reshenya v konechnom vide uravnenii Eulera-Puassona.-M.-Igevsk, 2004, 172 p. (in Russ.).
2. Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010, 132 p. (in Russ.).

М.Д.Шыныбаев[1], *А.А.Беков*[1], *А.Б.Абжапбаров*[2], *С.С.Дайырбеков*[3], *Е.С.Аяшева*[3], *А.С.Сансызбаева*[3]

([1]Академик Ө.М.Сұлтанғазин атындағы ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы қ.;
[3]М.О.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.;
[2]Сыр-Дария университеті, Джетысай қ.)

С.В.КОВАЛЕВСКАЯНЫҢ ИНТЕГРАЛДАНУ КЕЗЕҢІНЕ ҰҚСАС ОРТАЛЫҚ НЬЮТОН ӨРІСІНДЕГІ ИНТЕГРАЛДАНУ КЕЗЕҢІ ТУРАЛЫ

Резюме

Қатты дененің массалық центріне қатысты орталық ньютон өрісіндегі қозғалысының дифференциалдық теңдеулерінің жаңа интегралдану кезеңі анықталды. Интегралдану жолы өстік симметриялық денеге байланысты қорытылды. Мұнда бас орталық инерциялық моменттер байланысы былай ерекшеленеді: $A = B = 2C$, $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C = 0$, $C-$ массалық центр. Тура осындай масса жайылу жағдайында 1889 жылы С.В.Ковалевская жылжымайтын нүктеге қатысты қатты дененің айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулерінің бір шешілу кезеңін ашқан еді. Мұнда жылжымайтын нүкте G дененің экваторлық қимасында орналасқан болатын $x_G \neq 0$, $y_G \neq 0$, $z_G = 0$, және дене қозғалысы G нүктесінен бағытталған ауырлық күшінің әсерінен айналмалы қозғалатын. Шешім жалпы түрде гиперэллипстік интегралдарды қолданып жазылған болатын.

Уақыт өте бұл шешім көптеген актуалдық математика және механика есептерімен байланысты болып, күннен күнге кеңінен қолданыс тапты. Осы күнге дейін ондағы әдістермен ой өрістер құндылығын жоймады [1].

Біз С.В.Ковалевская есебіндегі дененің айналу нүктесін массалық центрге ауыстырдық, және қозғалыс ньютонның орталық күш өрісінде өрбиді деп алдық, өйткені жасанды Жер серігінің қозғалысы екі қозғалысқа жіктеледі: орбиталық (массалық центрімен бірге) және айналмалы массалық центрге қатысты.

Біздің жағдайда дифференциалдық теңдеулер тәуелсіз төрт бірінші интегралдарды қорытуға мүмкіндік береді.

Жалпы теория негізінде олар толық шешімге алып келеді.

Шешім квадратуралар арқылы Эйлер бұрыштарын өрнектейді. Шешімдер басқарылмайтын ғарыштық нысандардың қозғалысын қадағалауға мүмкіншілік орнатады.

Кілт сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.